الثراء
AL-THARAA

www.altharaajo.com

الثراء

في الرياضيات

تأسيس
2005

أ. صهيب دار عوّاد

الأستاذ صهيب دار عواد
0799582760

تأســـيس

1) العمليات الحسابية :-

الأعداد

أعداد حقيقية (IR)

جميع الأعداد إلي مرت علينا

أعداد مركبة

$\sqrt{-1} = i$

أعدا د نسبية (Q) هي الأعداد التي يمكن كتابتها على صور $\frac{a}{b}$

1) عداد طبيعية (N) بدون صفر

1,2,3,4,5,..........

2) أعداد صحيحة (Z)

......, -3 ,-2,-1,0,1,2,3,4,.......

3) كسور و الأعداد الكسرية

$3\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$

4) كسور عشرية منتهية

0.5 , 3.4213

5) كسور عشرية دورية

2.5 , 3.4242

6) جذور المربعات الكاملة

$\sqrt{6}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{4}$

7) الجذر التكعيبي للمكعبات الكاملة

$\sqrt[3]{27}$ ، $\sqrt[3]{125}$

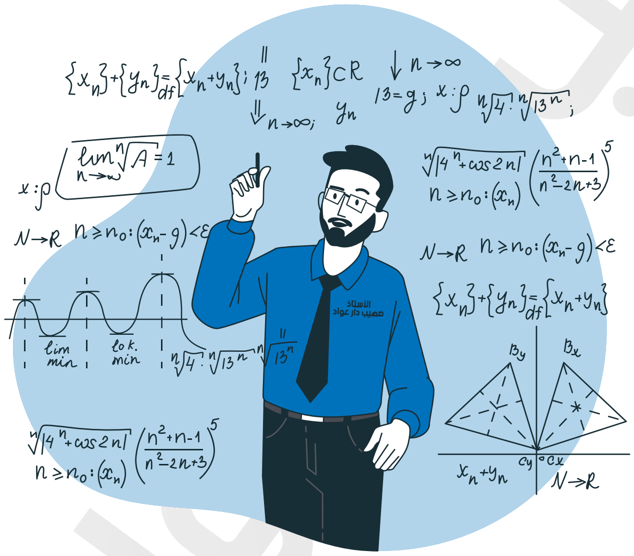
أعداد غير نسبية (i)

هي الأعداد التي لا يمكن كتابتها على صورة $\frac{a}{b}$

1) الأعداد العشرية الغير منتهية 2.513

2) الجذر التربيعي للمربعات غير الكاملة $\sqrt{5}$, $\sqrt{4}$

3) الجذر التكعيبي للمكعبات الغير كاملة $\sqrt[3]{27}$ ، $\sqrt[3]{3}$



العمليات الحسابية على الأعداد الصحيحة (Z)

أولاً جمع الأعداد الصحيحة

أ - إذا تشابهت في الإشارات

(لها نفس الإشارة)

⟵ نجمع العددين ونضع نفس الإشارة

ب - إذا اختلفت الإشارات

نطرح و نضع إشارة العدد الأكبر

مثـال

1) 4 +3 =7

2) -5+-3 =-8

3) -9+4 =-5

4) 15-3 =12

ثانيـاً طرح الأعداد الصحيحة

نحول الأعداد لجمع و نستخدم قواعد الجمع

a - b = a + (-b)

5 - 3 = 5 + (-3) = 2

9 - 14 = 9 + (-14) =-5

ملحوظة : عند التقاء إشارتين :-

نتعامل معاملة الضرب

$\pm\ \pm \rightarrow +$

$\mp\ \pm \rightarrow -$

1) 3 - - 4 = 3 + 4 = 7

2) -4 + -5 = -9

ثالثاً ضرب الأعداد الصحيحة وقسمتها

تشابهت الإشارات	اختلفت الإشارات
الجواب +	الجواب -
1) - × -	1) + × -
2) + × +	2) - × +
3) $\frac{-}{-}$	3) $\frac{-}{+}$
4) $\frac{+}{+}$	4) $\frac{+}{-}$

مثـال

1) -5 × -3 = 15

2) 5 × 6 = 30

3) 9 × -8 = -72

4) 25 ÷ -5 = -5

5) $\frac{128}{4}$ = 32

تدريب

1) $-5 \times -3 = -15$
2) $-2 \times 7) -4 =$
$-14 - 4 = -18$
3) $(0 -3) \div 3 =$
$-3 \div 3 = -1$
4) $(4 - 5) \times -3 =$
$-1 \times -3 = 3$
5) $14 \div -2 \times 3 =$
$-7 \times 3 = -21$
6) $-(-1) - 3 =$
$+1 - 3 = -2$
7) $14 \times 2 \div -7 =$
$28 \div -7 = -4$
8) $(-3- -4) - -2=$
$-3 +4 + 2 =$
$1 + 2 =3$
9) $(1 +-5) \div 2=$
$-4 \div 2 = -2$
10) $(-2 + 4) \times (-3 - 2) =$
$2 \times -5 = -10$

** الكسور العادية والأعداد الكسرية **

الفعلي

الكسر العادي : هو الذي بسطه أقل من مقامه

$\frac{1}{3}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$

العدد الكسري :

كسر عادي   عدد صحيح

$3\frac{1}{5}$ / 5 __

الكسر غير الفعلي : هو الكسر الذي بسطه أكبر من مقامه وهو بالأصل عدد كسري

$\frac{9}{7}$ / $\frac{8}{3}$

أولاً التحويل من عدد كسري إلى كسر غير فعلي والعكس

عدد كسري ⇄ كسر غير فعلي

1) تحويل عدد كسري إلى كسر غير فعلي

$$a\frac{^{+}b}{_{\times}c} = \frac{c \times a + b}{c}$$

نضرب المقام في العدد الصحيح ونجمع البسط ونقسم على نفس المقام

مثال

حول كل مما يأتي من الأعداد الكسرية إلى كسور غير فعلية

1) $2\frac{^{+}1}{_{\times}3} = \frac{7}{3}$

2) $9\frac{^{+}1}{_{\times}2} = \frac{19}{2}$

2) تحويل كسر غير فعلي إلى عدد كسري

$\frac{a}{b}$ ⇒ $b \overline{)\,a}$

ناتج X ⟵ العدد الصحيح

باقي ⇒ البسط

مثال

حول الكسور غير فعلية إلى أعداد كسرية

1) $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

X2 العدد الصحيح
المقام 3 | 7
6
1 البسط

2) $\frac{32}{10} = 3\frac{2}{10}$

3 العدد الصحيح
المقام 3 | 32
30
البسط 2

العمليات الحسابية على الكسور العادية والأعداد الكسرية

أولاً الجمع والطرح

1) إذا كانت المقامات موحدة نجمع البسط ونضع نفس المقام

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

2 إذا كانت المقامات ليست موحدة (نقوم بتوحيد المقامات)

مثال

1) $\frac{5}{16} + \frac{6}{16} = \frac{11}{16}$

2) $\frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{11}{16} = \frac{1}{3}$

3) $\frac{2\times2}{2\times3} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

4) $\frac{7\times7}{7\times2} + \frac{2}{14} = \frac{49}{14} + \frac{2}{14} = \frac{51}{14}$

• عند جمع أو طرح الأعداد الكسرية تحويلها إلى كسور غير فعلية :-

1) $2\frac{1}{4} + \frac{1}{8} =$

$\frac{2\times9}{2\times4} + \frac{1}{8} = \frac{19}{8}$

2) $\frac{7\times8}{7\times1} - \frac{6}{7} =$

$\frac{56}{7} - \frac{6}{7} = \frac{50}{7}$

ثانياً ضرب الكسور العادية والأعداد الكسرية

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{b}$$

لا يشترط أن تكون المقامات متساوية

مثال

1) $\frac{3}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{6 \div 2}{10 \div 2} = \frac{3}{5}$

2) $\frac{4}{1} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$

3) $2 + \frac{1}{\times4} \times \frac{6}{8} = \frac{9}{4} \times \frac{6}{8} = \frac{54}{32}$

قسمة الكسور : نحول إلى ضرب مع قلب الكسر الثاني (المقسوم عليه)

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

شكل آخر : $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{C}{D}} = \frac{a \times d}{b \times c}$

مثال

1) $\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{1\times7}{3\times5} = \frac{7}{15}$

2) $\frac{2}{5} \div \frac{1}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{4}{1} = \frac{8}{5}$

3) $2\frac{+1}{+4} \div \frac{3}{1} = \frac{2}{5} \times \frac{4}{1} = \frac{9 \div 3}{12 \div 3} = \frac{3}{4}$

تدريب

1) $\left(\frac{2}{1} \times \frac{5}{7}\right) \div 3 =$

$\frac{70}{7} \div \frac{3}{1} = \frac{10}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{10}{21}$

2) $\frac{2}{5} \times \frac{-3}{1} = \frac{-6}{5}$

3) $\frac{\frac{-3}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{-3\times4}{4\times3} = \frac{7}{15} = -1$

4) $\frac{5}{2} \times \left(\frac{3}{1} \div \frac{1}{5}\right) =$

$\frac{5}{2} \times \frac{3}{1} \times \frac{5}{1} = \frac{15}{2} \times \frac{5}{1} = \frac{75}{2}$

5) $1 + \left(\frac{+1}{x4} \times 3\right) =$

$1 + \frac{9}{4} \times \frac{3}{1} = \frac{27}{1} + \frac{1\times4}{1\times4} = \frac{27}{4} + \frac{4}{4}$

6) $\frac{7}{12} - \frac{2\times1}{2\times6} + 3 =$

$\frac{7}{12} - \frac{2}{12} + 3$

$\frac{5}{12} + \frac{3\times12}{1\times12} = \frac{5}{12} + \frac{36}{12} = \frac{41}{12}$

7) $\frac{2}{9} + \left(\frac{2}{1} \times \frac{4}{3}\right) =$

$\frac{2}{9} + \left(\frac{24}{9} = \frac{26}{9}\right)$

الكسور العشرية والأعداد العشرية :

الكسر العشري : هو عدد يحتوي على فواصل عشرية والجزء الصحيح صفر .

0.2 , 0.41 , 0.241

العدد العشري : هو عدد يحتوي على فاصلة عشرية.

2.7 , 22.951

- التحويل من كسر عشري الى كسر عادي

$0.2 \longrightarrow \frac{2}{10}$

$0.25 \longrightarrow \frac{25}{100}$

- التحويل من عدد عشري إلى كسر عادي (عدد كسري)

1) $3.5 \longrightarrow 3\frac{5}{10}$

2) $4.261 \longrightarrow 4\frac{261}{1000}$

* الضرب بـ 10 , 100 , 1000

- عند الضرب في 10 نحرك الفاصلة العشرية منزلة واحدة إلى اليمين .
- عند الضرب في 100 نحرك الفاصلة العشرية منزلتين الى اليمين .
- عند الضرب في 1000 نحرك الفاصلة العشرية 3 منازل الى اليمين .

*القيمة على 10 , 100 , 1000

- عند القسمة على 10 نحرك الفاصلة العشرية منزلة واحدة إلى اليسار
- عند القسمة على 100 نحرك الفاصلة العشرية منزلتين إلى اليسار .
- عند القسمة على 1000 نحرك الفاصلة العشرية 3 منازل إلى اليسار .

اختصار

قسمة ⟵ • ⟶ ضرب

مثـال

جد ناتج ما يلي :

1) $5.2 \times 10 = 52$

2) $0.213 \times 1000 = 213$

3) $5.22 \times 100 = 522$

4) $625 \div 1000 = 0.625$

5) $53.1 \div 10 = 5.31$

ضرب الكسور العشرية والأعداد العشرية

عند الضرب نضرب بدون فواصل ونعد عدد المنازل على يمين الفاصلة .

مثـال

1) 2.1×5.4

$$\begin{array}{r} 54 \\ \times\ 21 \\ \hline 54 \\ +\ 1080 \\ \hline 11.34 \end{array}$$

2) 25.5×2.33

$$\begin{array}{r} 255 \\ 233 \\ \hline 01765 \\ 07650 \\ 51000 \\ \hline 59.415 \end{array}$$

قسمة الكسور العشرية والأعداد العشرية :-

عند قسمة عدد عشري على عدد عشري يجب أن يكون المقام (المقسوم عليه) عدد صحيح فإذا لم يكن نضرب كل من المقسوم والمقسوم عليه بـ 10 , 100 , 1000 , ... ليصبح المقسوم عليه عدد صحيح

مثـال

جد ناتج ما يلي :

1) $\underset{\text{المقسوم}}{1.42} \div \underset{\text{المقسوم عليه}}{0.2} =$

$$\frac{1.42 \times 10}{0.2 \times 10} = \frac{14.2}{2}$$

$$\begin{array}{r} 7.1 \\ 2\,\overline{)\,14.2} \\ 14 \\ \hline 02 \\ \hline 0 \end{array}$$

تدريب

1) $2.34 \times -6.2 =$

-14.508

2) $0.72 \times 0.35 =$

0.252

3) $-2 \times 2.41 =$

- 4.82

4) $0.944 \div 0.4 =$

2.36

5) $4.658 \div 5 =$

0.9316

6) $18 \div 0.2 =$

90

7) $0.006 \div 0.002 =$

3

8) $9000 \div 100 =$

0.252

9) $632 \div 100 =$

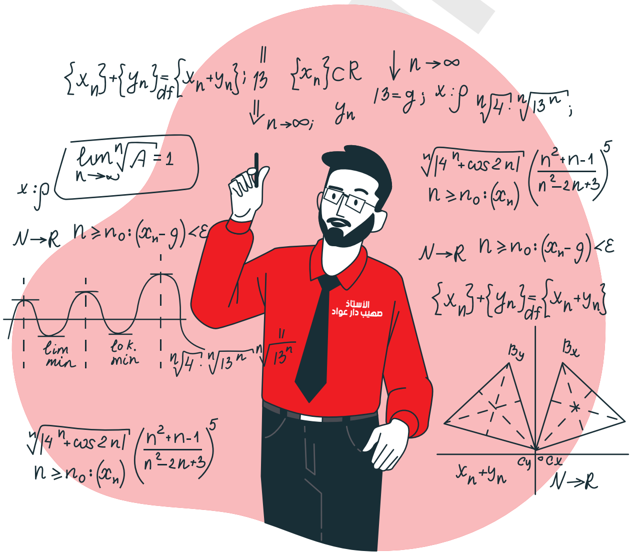
6.32

10) $8.02 + 80.2 =$

88.22

11) $9.005 - 3.9 =$

5.105



الحدود والمقادير الجبرية

الحد الجبري : هو حاصل ضرب عدد ثابت في متغير .

$2x$ → ثابت ، متغير

$3\,xy$ → ثابت ، متغير

$-\,y$ → ثابت (-1) ، متغير

المقدار الجبري : هو عبارة عن حد جبري أو مجموعة من الحدود بينهم إشارة جمع أو طرح .

$5xy$ → مقدار جبري مكون من حد واحد

$2x + 3xy$ → مقدار جبري مكون من حدين

الحدود الجبرية المتشابهة

هي الحدود الجبرية التي لها نفس القسم الرمزي (نفس المتغير بنفس الأس)

1) غير متشابهين $5x$ ، $5x^2$

2) متشابهين $2x^3$ ، $\frac{1}{2}x^3$

3) غير متشابهين (بالقسم الرمزي) $5y$ ، $5x$

جمع الحدود والمقادير الجبري وطرحها

نجمع أو نطرح الحدود المتشابهة فقط وذلك من خلال جمع المعاملات لكل حد

مثال

1) $2x^3y + 3x^3y = 5x^3y$

2) $6x^2 - 5x^2$

3) $3x^3 + x^2$ لا نجمع لان الحدود غير متشابهة

عند جمع مقدار جبريين نجمع الحدود المتشابهة فقط

مثال

1) $(5x^2 + 4x - 1) + (3x^2 - 2x)$

$= \cancel{5x^2} + 4x - 1 + \cancel{3x^2} - 2x$

$= 8x^2 + 2x - 1$

عند طرح المقادير الجبرية لا تنسى توزيع الإشارة السالبة على القوس الثاني .

1) $(5x^2 + 4x - 1) + (3x^2 - 2x)$

$= \cancel{5x^2} + 4x - 1 + \cancel{3x^2} - 2x$

$= 2x^2 + 6x - 1$

ضرب الحدود والمقادير الجبرية

قبل البدء بضرب الحدود والمقادير الجبرية يجب أن تتعلم قواعد الأسس .

- قوانين الأسس والأسس النسبية

n ⟵ أس

a ⟵ أساس , $2x^2$, x^2

الأسس في حالة الضرب تجمع إذا تشابه الأساس

1) $x^n \times x^m = x^{n+m}$

$x^3 \times x^2 = x^5$

الأسس في حالة القسمة تطرح إذ تشابه الأساس

2) $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$

$\frac{x^4}{x^2} = x^{4-2} = x^2$

الأسس توزع على الضرب

3) $(x^n)^m = x^{n\times m}$

$(x^2)^3 = x^{2\times 3} = x^6$

4) $(xy)^n = x^n \times y^n$

$(2y)^3 = 2^3 \times y^3 = 8y^3$

الأسس توزع على القسمة

5) $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

$\left(\frac{2}{x}\right)^2 = \frac{2^2}{x^2} = \frac{4}{x^2}$

6) $x^{-n} = \frac{1}{xn} \rightarrow \frac{1}{x^n} = x^{-n}$

$\frac{2}{x^2} = 2x^{-2}$

إذا بدلنا x من مقام إلى بسط نغير إشارة الأس والعكس .

7) $x^0 = 1$ $\quad x \neq 0$

$2^0 = 1$

$1000000^0 = 1$

ضرب الحدود الجبرية

حد × حد | حد × مقدار | مقدار × مقدار

أولاً ضرب حد جبري مع حد جبري

نضرب بالمعاملات ونضرب المتغيرات
(ضرب المتغيرات من خلال قواعد الأسس)

1) $(2x).(x^2) = 4x^{1+2} = 4x^3$

2) $5y^2 \times 6y^{-2} = 30y^0 = 30 \times 1 = 30$

ثانياً ضرب حد جبري في مقدار جبري

عند ضرب حد جبري في مقدار جبري ضرب الحد في جميع حدود المقدار

حد جبري × (حد + حد + حد)

1) $5 \times (4x^2 + 2x - 1)$

$20x^3 + 10x^2 - 5x$

2) $-(2x - 4x^2)$

$= -2x + 4x^2$

ثالثاً ضرب مقدار جبري في مقدار جبري آخر

عند ضرب مقدار جبري في مقدار جبري يتم ضرب كل حد من هذا المقار الأول في جميع حدود المقدار الثاني ثم نجمع الحدود المتشابهة .

(حد + حد) (حد + حد)

1) $(x+3)(x-5)$

$= x^2 - 5x + 3x - 15$

$= x^2 + 6x + 9$

قاعدة مهمة
مفاتك المربع

2) $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$

3) $(x+1)^2 = y^2 + 2x + 1$

5) $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$

قسمة الحدود والمقادير الجبرية

1) حد ÷ حد

قسمة حد جبري على حد جبري.

- نقسم المعامل على المعامل والمتغير على المتغير .

1) $\frac{ax^n}{bx^m} = \frac{a}{b}x^{n-m}$

2) $\frac{15x^4}{5x^3} = 3x^{4-3} = 3x$

3) $\frac{20x^2yz^3}{5yz^2} = 4x^2z$

4) $\frac{25x^{-4}}{5x^{-3}} = 5x^{-1} = \frac{5}{x}$

تحليل المقادير الجبرية

مثال

$(X+1)(2X+1) =$

$= 2X^2 + X + 2X + 1$

$= 2X^2 + 3X + 1$

التحليل هو عملية عكسية يأتي المقدار بالصورة الآتية :-

$2X^5 + 3X + 1 = (X+1)(2X+1)$

طرق تحليل المقادير الجبرية :

أولاً الفرق بين مربعين

$(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$

قوسين متشابهين مختلفين بالإشارة

1) $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$

2) $(9 - \frac{1}{4}x^2) = (3 + \frac{1}{2}x)(3 - \frac{1}{2})$

3) $(x^2 - 3) = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

4) $(x^2 + 10) = (x^2 + 4)(x^2 - 4)$

$(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

ملحوظة

مجموع مربعين لا يحلل لان مميزها سالب

$a^2 + b^2 \longrightarrow$ لا يحلل

ثانياً إخراج عامل مشترك

عند اخذ عامل مشترك نقسم كلحد من الحدود على العامل المشترك .

1) $5x^2 + 2x = x(\frac{5x^2}{x} + \frac{2x}{x})$

$= x(5x + 2)$

2) $3x^3 + 2x = x(\frac{3x^2}{x} - \frac{2x}{x})$

$= X(3x + 2)$

3) $2y^2 - 8 = 2(y^2 - 4)$

$= 2(y+2)(y-2)$

ثالثاً فرق بين مكعبين ومجموع مكعبين

$$(a^3 \pm b^3) = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

مثال

1) $x^3 - 8 =$

$(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

الأول تربيع ×الأول بالثاني+الثاني تربيع

2) $\frac{1}{8}x^3 + 27 =$

$(\frac{1}{2}x + 3)(\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 9)$

3) $x^3 - 5 = (x - \sqrt{5})(x^2 + \sqrt[3]{5x} + \sqrt[3]{5^2})$

25

4) $(x + 2)^3 - 125$

$(x + 2 - 5)(cx + 2)^2 + 5(x + 2) + 25$

$(x - 3)(cx + 2^2) + 5x + 35$

رابعاً تحليل العبارة التربيعية (ثلاثية الحدود)

$$ax^2 + bx + c \quad , a \neq 0$$

معامل x^2 معامل x العدد الثابت

هناك حالتين

$a \neq 1$: معامل $x^2 \neq 1$

$a = 1$: معامل $x^2 = 1$

$a = 1$

$x^2 + bx + c$

نبحث عن عددين حاصل ضربهم يساوي c وحاصل جمعهم يساوي b

مثال

1) $x^2 + 5x + 4$

$(x + 1)(x + 4)$

نبحث عن عددين حاصل ضربهم =4
وجمعهم = 5

2) $x^2 + 2x - 3$

$(x - 1)(x + 3)$

3) $x^2 - x - 12$

$(x - 4)(x + 3)$

نلجأ للمعادلة الوهمية

1) $2x^2 - 9x - 5$

$x^2 - 9x - 10$

$(X - \frac{10}{2})\quad(X + \frac{1}{2})$

2) $20x^2 - 3x - 2$

$x^2 - 3x - 40$

$(X - \frac{8}{5\times4})\quad(X + \frac{5}{4\times5})$

$= (5x - 2)(4x + 1)$

3) $6x^2 - 5x + 2$

$x^2 - 5x + 6$

$(X - \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\times3})\quad(X - \frac{\cancel{3}}{2\times\cancel{3}})$

$= (3x - 1)(2x - 1)$

نستخدم تحليل المقادير الجبرية

- تبسيط المقادير الكسرية (كسر جبري)
- حل المعادلات

التبسيط المقادير الجبرية

الصورة العامة $\frac{\text{مقدار}}{\text{مقدار}}$

خطوات الحل :-

1) نحلل كل من البسط والمقام إلى عوامله الأولية

2) نختصر العوامل المشتركة الناتجة

مثال اكتب كل من المقادير الآتية بأبسط صورة :-

1) $\frac{x^3 + 125}{x^2 + 6x + 5}$

$= \frac{(x + \cancel{5})(x^2 - 5x + 25)}{(x - 1)(x + 5)}$

$= \frac{x^2 - 5x + 25}{(x - 1)}$

2) $\frac{x(x^2 + 5x + 6)}{2x + 6}$

$= \frac{x(x + 2)(x + \cancel{3})}{2(x + \cancel{3})}$

$= \frac{x(x + 2)}{2}$

خامساً درجة ثالثة فأكثر (القسمة التركيبية)

1) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

نبحث عن صفر الاقتران

$x = -1$

$(x + 1)$

العدد (-1) صفر للاقتران (2) احد عوامل للاقتران

	x^3	x^2	x	الحد المطلق
	1	-4	1	6
الجذر -1	↓	-1	5	6-
	1	-5	6	0

2) $f(x) = (x + 1)(x^2 - 5x + 6)$

$= (x + 1)(x - 2)(x - 3)$

3) $f(x) = x^4 + x - 18$

$x = 2$

احد العوامل $(x - 2)$

	x^4	x^3	x^2	x	الحد المطلق
	1	0	0	1	18-
الجذر +2	↓	2	4	8	18
	1	2	4	9	0

$f(x) = (x - 2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 9)$

المعـــــادلات :

المعادلة : هي عبارة رياضية تحتوي على متغير واحد على الأقل وإشارة مساواة .

أنـواع المعادلات :-

1) خطية

2) تربيعية

3) تكعيبية

4) كسرية

المقصود بحل المعادلات

هو إيجاد قيمة المتغير

1) حل المعادلات الخطية بمتغير واحد

$ax + b = c$

لان اكبر أس فيها = 1

خطوات حل المعادلات الخطية

1) نجعل المتغير في جهة والثوابت في جهة أخرى

مثـال

1) $x + \cancel{1} = 5$

$\quad -1 \quad -1$

$x = 4$

2) $x - \cancel{4} = -7$

$\quad +4 \quad +4$

$x = -3$

3) $\frac{5\cancel{x}}{\cancel{5}} = \frac{20}{5}$

$x = 4$

4) $\frac{3\cancel{x}}{\cancel{3}} = 12 \times 3$

$x = 36$

5) $2x + \cancel{1} = 7$

$\quad -1 \quad -1$

$\frac{2}{2}x = \frac{6}{2}$

$x = 3$

6) $\frac{4}{3}x + \cancel{5} = 9$

$\quad -5 \quad -5$

$\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 4 \times \frac{3}{4}$

$x = 3$

المعادلات التربيعية بالتحليل :-

خطوات الحل :-

1) نجعل أحد الأطراف فالمعادلة = 0

2) تحلل المعادلات إلى عواملها

3) نستخدم خاصية : عددين حاصل ضربهم صفر .

$$a \times b = 0$$

إما $a = b$ إما $b = 0$

مثال

1) $x^2 - 4 = 0$

$(x+2)(x-2)$

$(x+2)(x-2)$

$x+2=0$ $x-2=0$

$-2 \quad -2$ $+2 \quad +2$

إما $x = -2$ إما $x - 2 = 0$

$x = 0$

مجموعة الحل $\{-2 , 2\}$

2) $x^2 = 9$

$x^2 - 9 = 0$

$(x+3) \quad (x-3)$

$x+3=0$ $x-3=0$

$-3 \quad -3$ $+3 \quad +3$

أو $x = -3$ إما $x = 3$

3) $x^2 + 9x + 4 = 0$

$(x+7)(x+2) = 0$

$x+7=0$ $x-2=0$

$-7 \quad -7$ $-2 \quad -2$

إما $x = -7$ إما $x = -2$

مجموعة الحل $\{-7 , -2\}$

3) $x^2 + x = 20$

$x^2 + x - 20 = 0$

$(x-4) \ (+5) = 0$

إما $x - \cancel{4} = 0$ إما $x + \cancel{5} = 0$

$\cancel{+4} \quad +4$ $\cancel{-5} \quad -3$

$x = 4$ $x = -3$

مجموعة الحل $\{-5 , -4\}$

5) $(x-2)^2 - 16 = 0$

$((x-2)+4)((x-2)-4) = 0$

$(x+2)(x-6) = 0$

إما $x+2=0$ إما $x-6=0$

$-2 \quad -2$ $+6 \quad +6$

$x = -2$ $x = 6$

مجموعة الحل $\{-2 , 6\}$

المعادلات التربيعية باستخدام القانون العام

خطوات الحل :-

1) نجد قيمة a,b,c

2) نجد المميز

3) نستخدم القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

المميز

مثـال

1) $x^2 + 9x + 14 = 0$

$a = 1 \qquad b = 9 \qquad c = 14$

$\triangle = b^2 - 4ac$

$= 81 - 4 \times 1 \times 14$

$= 81 - 56 = 14$

المميز يحلل وله جذران

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\triangle}}{2a}$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{25}}{2a} = \frac{-9 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{-9 + 5}{2} = -2$$

$$x = \frac{-9 - 5}{2} = -7$$

مجموعة الحل $\{-7 , -2\}$

2) $x^2 + 2x - 3 = 0$

$a = 1 \qquad b = 2 \qquad c = -3$

$\triangle = b^2 - 4ac$

$4 - 4 \times 1 \times -3$

$= 4 - 12$

$4 + 12 = 15$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

مجموعة الحل $\{-3 , 1\}$

المعادلات التكعيبية

خطوات الحل :-

(نحلل المعادلة إلى عواملها الأولية

2) عددين حاصل ضربهم صفر

$a \times b = 0$

$a = 0$ or $b = 0$

مثال

1) $x^3 - 8 = 0$

$= (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$

$= x - 2 = 0$

$x = 2$

2) $3x^3 + 3 = 0$

$= 3\underbrace{(x^3 + 1)}_{\text{مجموع مكعبين}} = 0$

$= 3(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$

$x + 2 = 0$

$-1 \quad -1$

$x = -1$

3) $x^3 - 4x^2 - 5x = 0$

$x(x^2 - 4x - 5) = 0$

$(x - 5)(x + 1) = 0$

$x - 5 = 0$ $x - 1 = 0$

$+5 \quad +5$ $-1 \quad -1$

$x = 5$ $x = -1$

مجموعة الحل $\{-1, 5\}$

حل المعادلات الكسرية :

الصورة العامة

$$\frac{\text{مقدار}}{\text{مقدار}} = \text{مقدار}$$

عند جمع أو طرح أو ضرب كسرين جبريين نعاملهم معاملة الكسور العادية.

نجمع ونبقي المقام

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

نوحد المقامات

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \times d \pm c \times b}{b \times d}$$

مثـال

جد مايلي :

1) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

2) $\frac{3}{4} + \frac{6}{5} = \frac{15 + 24}{20} = \frac{39}{20}$

3) $\frac{x + 1}{2x} + \frac{4x - 1}{x} =$

$$= \frac{(x + 1) \times x + (4x - 1) \times 2x}{2x \times x}$$

$$= \frac{x^2 + x + 8x^2 - 2x}{2x^2}$$

$$= \frac{9x^2 - x}{2x^2} = \frac{\cancel{x}(9x - 1)}{2\cancel{x^2}\, x}$$

$$= \frac{9x - 1}{2x}$$

4) $\frac{x}{x + 1} - \frac{1}{3} =$

$$= \frac{3x}{3x + 3} = \frac{x + 1}{3x + 3}$$

$$= \frac{3x - x - 1}{3x + 3} = \frac{2x - 1}{3x + 3}$$

خطوات الحل :- المعادلة الكسرية

1) حلل كل من البسط والمقام إن أمكن إلى عوامله الأولية .

2) اختصر العوامل المشتركة بين ابسط المقام .

3) بعد الاختصار إذا تحولت إلى معادلة خطية فحلها .

إما إبقاءها على $\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}} = \text{ثابت}$

ضرب تبادلي $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$

$$c \times b = a \times d$$

مثال

حل المعادلة الآتية :

1) $\dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 4x - 5}$

$= \dfrac{(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x + 5)}$

$= \dfrac{x + 2}{x + 5} = \dfrac{2}{1}$

$= x + 2 = -2x - 10$

$\quad -2 \quad -2$

$= x = -2x - 12$

$\quad +2x \quad +2x$

$\dfrac{3x}{3} = \dfrac{-12}{3}$

$\boxed{= x = -4}$

2) $\dfrac{2x - 6}{x - 1} = \dfrac{3}{1}$

$= 2x - 6 = 3x - 3$

$\quad -3x \quad -3x$

$-x = 3$

$\boxed{= x = -3}$

3) $\dfrac{x^3 - 1}{3x^2 + 3x + 3} = 5$

$= \dfrac{(x - 1)(x^2 + \cancel{x + 1})}{3(x^2 + \cancel{x + 1})} = 5$

$\dfrac{(x - 1)}{3} = \dfrac{5}{1}$

$(x - 1) = 15$

$\quad +1 \quad +1$

$\boxed{x = 16}$

تدريب

1) $\dfrac{x^2 + 5x}{x + 5} = -8$

2) $\dfrac{1 - x^2}{x - 1} = 6$

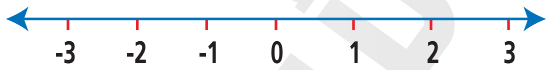
3) $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = 4$

4) $\dfrac{5x + 3}{x - 1} = 3$

5) $\dfrac{x + 7}{x^2 - 49} = 3$

الفـتـرات :

الفترة : هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية .



للتعبير عن هذه الفترة [0 , 1]

أنواع الفترات

فترات محدودة

فترات غير محدودة

أولاً الفترات المحدودة

الفترات المحدودة : هي فترات يمكن حساب طولها (طولها معلوم)

إذا كان $a < b \ , a , b , \in IR$

يمكن تقسيم الفترات المحدودة الى :

1) الفترة المغلقة [a , b]

$$[a,b] = \{x : a \leq x \leq b\}$$

1) الفترة المفتوحة a , b

$$(a,b) = \{x : a < x < b\}$$

3) الفترة نصف المغلقة a , b

$$(a,b) = \{x : a \leq x < b\}$$

4) الفترة نصف المفتوحة a , b

$$(a,b] = \{x : a < x \leq b\}$$

مثـال

مثل الفترات التالية على خط الأعداد :

1) [2 , 3]

2) (-1 , 2)

3) [2 , 4)

ثانياً الفترات غير المحدودة

الفترات غير المحدودة : هي فترات لا يمكن حساب طولها وتقسم إلى :

1) $[\ a , \infty\ ) = \{\ x : x \geq a \}$

2) $(\ a , \infty\ ] = \{\ x : x > a \}$

3) $(\ -\infty , a\ ] = \{\ x : x \leq a \}$

4) $(\ -\infty , a\ ) = \{\ x : x < a \}$

5) $(\ -\infty , \infty\ ) = \mathbb{R}$

مثـال

مثل الفترات التالية على خط الأعداد :

1) $[2 , \infty\ )$

2) $[\ 4 , \infty\ )$

3) $(\ -\infty , -2\ ]$

4) $(\ -\infty , 1\ )$

تدريـب

مثل الفترات التالية على خط الأعداد واستخدم رمز الفترة :

1) $A = \{\ x : 2 \leq x \leq 4 \}$

2) $B = \{\ x : 3 < x \leq 5 \}$

3) $C = \{\ x : x \geq 5 \}$

4) $D = \{\ x : x \leq 1\ \}$

5) $F = \{\ x : x < 3\ \}$

المتباينات

المتباينة : هي علاقة رياضية تعبر عن اختلاف مقدارين وتحتوي إشارات $<$, $>$, $\leq$, $\geq$

تذكر!!

عبارة رياضية $\longrightarrow$ $x + 1$

معادلة $\longrightarrow$ $x + 1 = 2$

متباينة $\longrightarrow$ $x + 1 < 2$

المتباينات
- خطية بمتغير واحد
- مركبة بمتغير واحد

أولاً خطية بمتغير واحد :

خطية : أعلى أس فيها 1

$2x + 1 < 4$

خطية بمتغير واحد

حل المتباينة الخطية بمتغير واحد :

إيجاد قيمة المتغير فيها حتى تصبح المتباينة عبارة صحيحة .

عند حل متباينة خطية بمتغير واحد ، يجب مراعاة خصائص المتباينات :

إذا كان $a < b$, $a , b , \in IR$ وكان $a \leq b$ فإن :

1) $a \pm c \leq b \pm c$

لا تتغير المتباينة إذا جمعنا أو طرحنا نفس العدد من طرفي المتباينة .

2) $ac \leq bc$, $c \geq 0$

لا تتغير المتباينة إذا ضربناها بعدد موجب في طرفي المتباينة .

3) $ac \geq bc$ $\quad c \leq 0$

تتغير المتباينة عند الضرب بعدد سالب .

4) $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ $\quad a , b > 0$

$a , b < 0$

تتغير المتباينة إذا أخذنا مقلوب الطرفين بشرط يكون لهما نفس الإشارة .

مثال

جد مجموعة الحل في كل مما يلي ومثله على خط الأعداد .

1) $x + 3 > 2$

$\quad -3 \quad -3$

$x > -1$

2) $x - 2 \leq 4$

$\quad +2 \quad +2$

$x \leq 6$

3) $\frac{x}{3} < 5$

$x \leq 15$

4) $\frac{-2x}{-2} > \frac{6}{-2}$

نغير المتباينة

$x \leq -6$

أولاً المتباينة المركبة بمتغير واحد .

$-9 \geq x + 6 \geq 0$

مثال

حل المتباينات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد .

1) $-3 < 4x + 1 < 9$

$-1 \quad -1 \quad -1$

$\frac{-4}{4} < \frac{4x}{4} < \frac{8}{4}$

$-1 < x < 2$

مجموعة الحل (-1 , 2)

2) $-16 < 2x - 2 < 16$

$+2 \quad +2 \quad +2$

$\frac{-14}{2} < \frac{2x}{2} \leq \frac{18}{2}$

$-7 < x \leq 9$

مجموعة الحل (-7 , 9]

3) $2x - 1 < 3x + 6 < 2x - 4$

$-2x \qquad -2x \qquad -2x$

$-1 < x + 6 < -4$

-6

$-7 \leq x \leq -10$

مجموعة الحل منطقة التقاطع

مجموعة الحل $\emptyset$

لايوجدحل

تدريب

حل المتباينات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد .

1) $4 + 5x < 3x - 8$

2) $x - 5 \geq -12$

3) $3x - 3 \leq 6x + 7 < 3x$

4) $2x + 1 < 3x - 4 < 2x + 10$

5) $0 \leq 2x - 3 \leq 11$

المعادلات الأسية

هي عبارة رياضية يكون الأساس فيها عدداً حقيقياً والأس متغير وتحتوي إشارة مساواة .

$2^{x-1} = 32$

طريقة حل المعادلان الأسية :

كتابة الطرفين بصورة أسية تتساوى الأساسات فيها لكي تتساوى الأسس .

مثال

1) $5^{3x+2} = 25^{x-1}$

$5^{3x+2} = (5^{2})^{x-1}$

$5^{3x+2} = 5^{2x-2}$

تساوى الأساس

الاسس متساوية

$3x + 2 = 2x - 1$

$-2x \quad -2 \quad -2x \quad -2$

$x = -4$

2) $8^{x} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

$(2^{3})^{x} = 2^{1} \times 2^{-x}$

$2^{3x} = 2^{1-x}$

$3x = 1 - x$

$+x \quad +x$

$\frac{4x}{4} = \frac{1}{4}$

$\boxed{x = \frac{1}{4}}$

3) $49^{x+1} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

$(7^{3})^{x+1} = \frac{7^{\frac{1}{2}}}{7}$

$7^{2x+2} = 7^{-\frac{1}{2}}$

$2x + 2 = \frac{-1}{2}$

$2x = \frac{-5}{2}$

$\boxed{x = \frac{-5}{4}}$

4) $4^{x-5} = 32^{2x+1}$

$(2^4)^{(x-2)} = (2^5)^{2x+1}$

$2^{2x-10} = 2^{10x+5}$

$2x - 10 = 10x + 5$

$+10 \quad +10$

$2x = 10x + 15$

$-10x \quad -10x$

$\frac{-8x}{-8} = \frac{15}{-8}$

$\boxed{X = \frac{15}{-8}}$

5) $9^x = 3\left(\frac{1}{3}\right)^x$

$(3^2)^x = 3^1 \times 3^{-x}$

$3^{2x} = 3^{1-x}$

$2x = 1 - x$

$\frac{5x}{5} = \frac{1}{5}$

$\boxed{X = \frac{1}{5}}$

4) $(625)^{2x+1} = \frac{5}{\sqrt{5}}$

$(5^4)^{2x+1} = \frac{5}{5^{\frac{1}{2}}}$

$5^{8x+4} = 5^{\frac{1}{2}}$

$8x + 4 = \frac{1}{2} - 4$

$8x = \frac{-7}{2}$

$\boxed{X = \frac{-7}{16}}$

تدريب

حل المعادلات الاسية الآتية :

1) $64 = (32)^{3-x}$

2) $(\sqrt{7})^{4x+5} = \left(\frac{\sqrt{28}}{2a}\right)$

3) $81^{5x+1} = 27^{4x-3}$

4) $\left(\frac{11}{\sqrt{11}}\right)^{3x+1} = 11^{x+7}$

4) $9^{x2} \; (27)^{x2} = 243$

حل أنظمة المعادلات :

1) حل نظام مكون من معادلة خطية و معادلة تربيعية
2) حل نظام مكون من معادلتين تربيعتين .

أولاً حل نظام مكون من معادلة خطية و تربيعية .

يمكننا استعمال طريقة التعويض وذلك بكتابة أحد المتغيري في المعادلة الخطية بدلالة الامر ثم نعوضه في المعادلة التربيعية .

مثال

حل أنظمة المعادلات الآتية :-

1) $x - y = 1$ .... (1)

$x^2 + y^2 = 5$ .... (2)

عن معادلة (1)

$x - y = 1$

$\boxed{x = 1 + y}$

نعوض في المعادلة (2) قيمة x

$(1 + y)^2 + y^2 = 5$

$1 + 2y + y^2 + y^2 = 5$

$2y^2 + 2y + 1 = 5$

$-5 \quad -5$

$2y^2 + 2y - 4 = 6$

نقسم المعادلة على 2

$y^2 + y - 2 = 0$

$(y + 2)(y - 1) = 0$

إما

$y + 1 = 0$

$\boxed{y = 1}$

$x = 1 + 1$

$\boxed{x = 2}$

أو

$y + 2 = 0$

$\boxed{y = -2}$

$x = 1 + -2$

$\boxed{x = -1}$

2) $2y = 8$ .... (1)

$y = 3 - 2x - x^2$ .... (2)

عن معادلة (1)

$2y = 8$

$\boxed{y = 4}$

نعوض في المعادلة (2) قيمة $y = 4$

$4 = 3 - 2x - y^2$

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$(x + 1)(x + 1) = 0$

$x = -1$

$(-1 , 4)$

ثانياً حل نظام مكون من معادلتين تربيعيتين

إذا كان على صورة	إذا كان على صورة	إذا كان على صورة
y = ... y = ...	$x^2 + y^2$ $x^2 + y^2$	xy
نقوم بمساواة المعادلتين	نستخدم الحذف	جعل إحدى المعادلتين بدلالة xy ثم حل

مثال

حل أنظمة المعادلات الآتية :-

1) $y = x^2 + 4x - 3$ .... ①

$y = -x^2 + 2x - 3$ .... ②

$x^2 + 4x - 3 = -x^2 + 2x - 3$

$2x^2 + 2x = 0$

$2x = 0$

$\boxed{x = 0}$

$\boxed{y = -3}$

$(0 , -3)$

$x + 1 = 0$

$\boxed{x = -1}$

$y = (-1)^2 + (4(-1)) - 3$

$= 1 - 4 - 3$

$= -6$

$(-1 , -6)$

حل النظام $(0 , -3)$, $(-1 , -6)$

3) $y + x = 5$ .... ①

$x^2 + y^2 = 9$ .... ②

عن معادلة ①

$y = 5 - x$

نعوض في المعادلة ② قيمة y

$x^2 + (5 - x)^2 = 9$

$x^2 + 25 - 10x + x^2 = 9$

$2x^2 - 10x + 16 = 0$

$x^2 - 5x + 8 = 0$

$\triangle = b^2 - 4ac$

$= 25 - 4 \times 1 \times 8$

$= 25 - 32 = -7 < 0$

لايوجد حل للنظام

تدريب

حل أنظمة المعادلات الآتية :

1) $2x + y = 12$

$y = x^2 + 5x - 6$

2) $x - y = 0$

$y = x^2 + 3x + 2$

3) $y = x^2 - 2$

$y + 2 = 0$

2) $x^2 + y^2 = 13$ .... (1)

$x^2 - y = 7$ .... (2)

(1) - (2)

$y^2 + y = 6$

$y^2 + y + 6 = 0$

$(y + 3)(y - 2) = 0$

$y + 3 = 0$ or $y - 2 = 0$

$\boxed{y = -3}$

$x^2 \pm -3 = 7$

$\quad -3 \quad -3$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$

$x = \pm 2$

$\boxed{y = 2}$

$x^2 - 2 = 0$

$\quad +2 \quad +2$

$\sqrt{x^2} \quad \sqrt{9}$

$x = +3$

3) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ .... (1)

$x^2 + xy = 6$ .... (2)

نحلل معادلة (1)

$(x - y)(x - 2y) = 0$

$x - y = 0$ or $x - 2y = 0$

$\boxed{x = y}$

نعوض في المعادلة (2)

$(2y)^2 + 2y \times y = 6$

$4y^2 + 2y^2 = 6$

$\frac{6y^2}{6} = \frac{6}{6}$

$\sqrt{y^2} = \sqrt{1}$

$y = \pm 1$

$x = \pm 2$

$\boxed{x = 2y}$

نعوض في المعادلة (1)

$y^2 + y^2 = 6$

$\frac{2y^2}{6} = \frac{6}{6}$

$\sqrt{y^2} = \sqrt{3}$

$y = \pm\sqrt{1}$

$x = \pm\sqrt{3}$

تدريب

حل أنظمة المعادلات الآتية :

1) $y = x^2 + x + 2$

$y = -x^2 = -12$

2) $y = -x^2 - 2x + 3$

$y = y^2 + 2x - 3$

3) $x^2 + y^2 = 16$

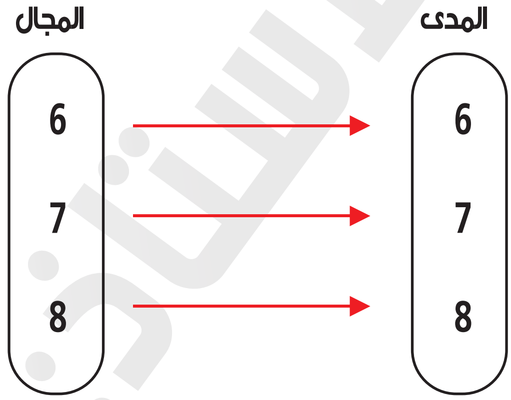
$3y - x^2 = -12$

4) $y = -x^2 + 6x + 8$

$y = -x^2 - 6x + 8$

الاقترانات

- **تعريف الاقتران :** هو علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال مع عنصر واحد في المدى .



المجال : (domain) : قيم x التي تستطيع تعويضها في الاقتران .

المدى : (range) : قيم y التي تنتج عن تعويض x في الاقتران .

مثال

$f(x) = 3x + 2$

$h(x) = 2x^2 - 1$

أنواع الاقترانات

- كثير الحدود
- النسبي
- المتشعب
- الأسي
- الجذري

أولاً الاقتران كثير الحدود :

الصورة العامة :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{4-1} + ... a_0$$

x : متغير

n : عدد صحيح غير سالب

$a_n , a_{n-1} , a_{n-2} , ... , a_0$

معاملات كثير الحدود

مثال

1) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$

اقتران كثير الحدود

2) $g(x) = 2 + \frac{1}{x^3}$

ليس كثير الحدود

3) $h(x) = 2 + \sqrt{x}$

ليس كثير الحدود

4) $f(x) = \frac{3x^3 + 6x}{2}$

كثير حدود

مجال الاقتران كثير الحدود

مجموعة الأعداد الحقيقية IR او مجموعة جزئية منها تحدد من السؤال .

مدى الاقتران كثير الحدود

مجموعة الأعداد الحقيقية IR او مجموعة جزئية منها .

درجة الاقترانات كثيرات الحدود

تصنف حسب درجة قيمة اكبر أس فيها .

① الاقتران الثابت

الصورة العامة

$f(x) = a$

a عدد ثابت

$f(x) = 5 \quad , \quad g(x) = \sqrt{2}$

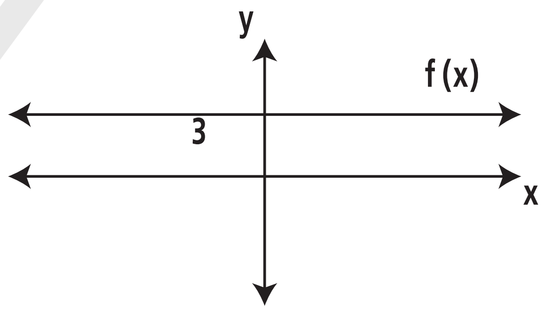
هو اقتران كثير حدود من الدرجة الصفرية

عند تمثيل الاقتران الثابت بيانياً يكون منحنى

الاقتران عبارة عن خط مستقيم .

مثـال

مثل بيانياً : $f(x) = 3$



مجال الاقتران الثابت

هو IR مجموعة الأعداد الحقيقية

***مدى الاقتران الثابت**

هو $\{a\}$

② الاقتران الخطي

الصورة العامة

$f(x) = ax + b$

أعداد ثابتة لكن : b , a

$a \neq 0$

هو كثير حدود من الدرجة الأولى

$f(x) = 3x + 2$

$h(x) = 5x$

$g(x) = x$

مجال الاقتران الخطي

مجموعة الأعداد الحقيقية IR

مدى الاقتران الخطي

مجموعة الأعداد الحقيقية IR

- عند تمثيل الاقتران الخطي بيانياً نكون جدول لقيم X والاقتران نختار قيم X ونعوضها

مثال

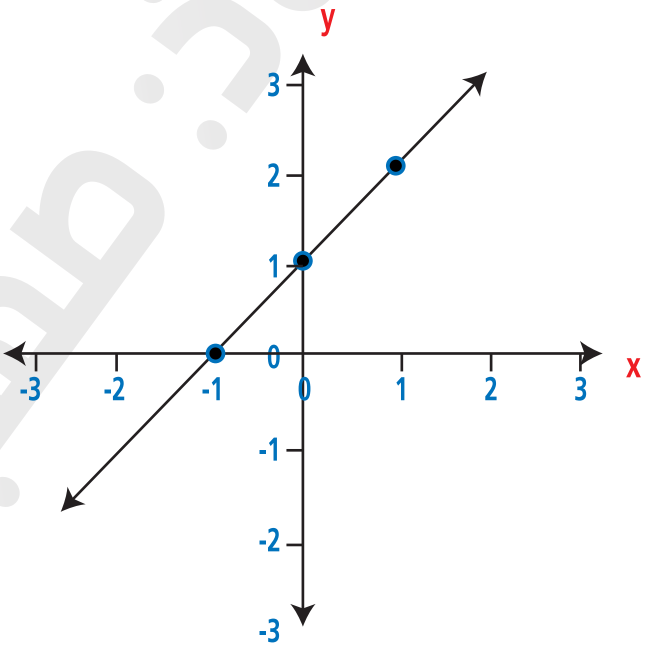
مثل بيانياً الاقتران : $f(x) = x + 1$

نكون جدول

x	-1	0	1
$f(x)$	0	1	2

أزواج مرتبة

$(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$



③ الاقتران التربيعي

الصورة العامة

$f(x) = ax^2 + bx + c$

أداة ثابتة a , b , c

ركن $a \neq 0$

هو اقتران كثير حدود من الدرجة الثانية

$f(x) = x^2 + 2x + 1$

$g(x) = 2x^2$

عند تمثيل الاقتران التربيعي بيانياً

1) نجد معادلة محور التماثل

$$x = \frac{-b}{2a}$$

2) نجد $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ نقطة التماس

زوج مرتب $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

إذا كان

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$a > 0 \longrightarrow$ مفتوحاً للأعلى ∪

$a < 0 \longrightarrow$ مفتوحاً للأسفل ∩

مثال

مثل بيانياً : $f(x) = x^2 - 2x + 1$

$a = 1, \quad b = -2 \quad , \quad c = 1$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$f(1) = 1^2 - 2 + 1 = 0$

نقطة التماس

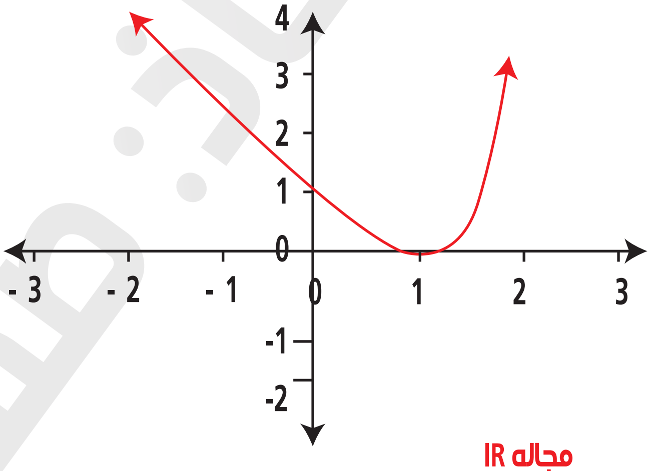
$(1 , 0)$

x	-1	0	1	2	3
f(x)	4	1	0	1	4

$(-1, 4), (0, 1), (1, 0), (2, 1), (3, 4)$

معامل : $x^2, 0 < a$

الاقتران مفتوح للأعلى



مجاله IR

المدى $\{ y : y > 0 \}$ $[0.00)$

مجال الاقتران التربيعي هو

مجموعة الأعداد الحقيقية IR أو حسب ما يطلب السؤال

مدى الاقتران التربيعي هو

$a > 0$

$\left\{ y : y \geq f\left(\frac{-b}{2a}\right) \right\}$

$a < 0$

$\left\{ y : y \leq f\left(\frac{-b}{2a}\right) \right\}$

ثانياً الاقتران النسبي

هو اقتران يمكن كتابته بصورة نسبية .

$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ $\quad g(x) \neq 0$

$h(x)$ كثير حدود

$g(x)$ كثير حدود

$f(x) = \frac{2}{x}$

$f(x) = \frac{x+3}{2x^2 - 4x + 1}$

هو أيضاً النسبة بين كثيري حدود.

مجال الاقتران النسبي

هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا أصفار المقام .

مثال

جد مجال كل مما يلي :-

1) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

نجد أصفار المقام

$x + 1 = 0$

$\boxed{x = -1}$

مجاله : مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا أصفار المقام

$\{x : x \neq -1\}$

2) $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - 4}$

نجد أصفار المقام

$x^2 - 4 = 0$

$(x+2)(x-2) = 0$

المجال : $\{x : x \neq \pm 1\}$

3) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 9}$

$x^2 + 9 = 0$ لا تحل

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية IR

تمثيل الاقتران النسبي بيانياً :

يوجد عدة حالات وهي :

1) $f(x) = \frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران خطي}} +$ الحد المطلق

نجد خط التقارب الرأسي وخط التقارب الأفقي

خط التقارب الرأسي ← صفر الاقتران الخطي الموجود في المقام $x =$

خط التقارب الأفقي ← الحد المطلق $y =$

تحديد الأرباع : يضرب إشارة الثابت وإشارة معامل x .

فإذا كان

مثال

مثل الاقتران $f(x) = \frac{3}{x2} + 1$ بيانياً :

خط التقارب الرأسي (صفر الاقتران الخطي)

$x - 2 = 0$

$\boxed{x = 2}$

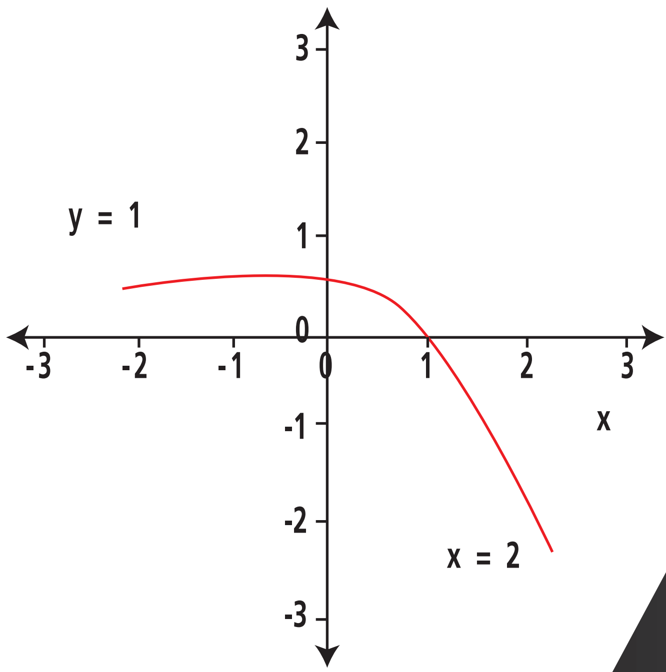
خط التقارب الأفقي

$\boxed{y = 1}$

تحديد الأرباع : إشارة الحد المطلق × إشارة معامل x

$\oplus \times \oplus = \oplus$

الرسم في الربع الأول والثالث



$2)\ f(x) = \frac{\text{ثابت}}{(\text{خطي})^2} +$ الحد المطلق

خط التقارب الرأسي   صفر الاقتران الخطي = x

خط التقارب الأفقي   الحد المطلق = y

تحديد الأرباع

إشارة الثابت

مثال

مثل الاقتران $f(x) = \frac{2}{(x-2)^2}$ بيانياً :

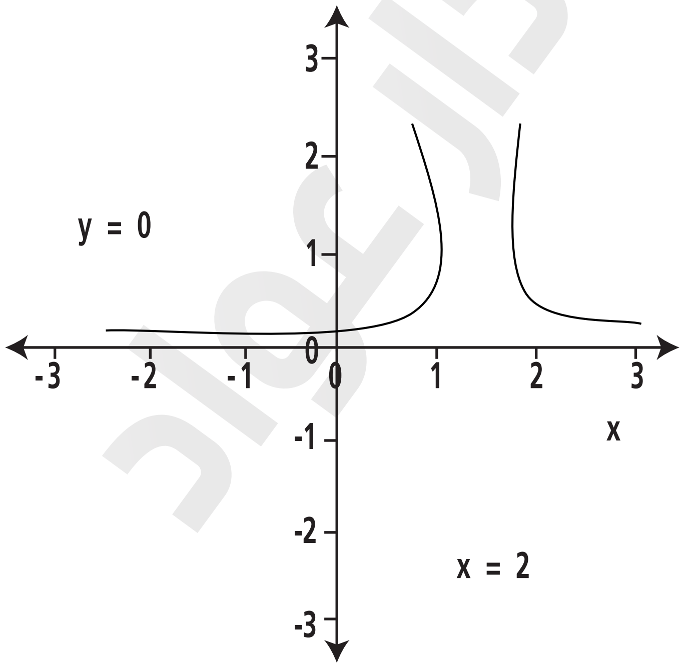
خط التقارب الرأسي $x - 2 = 0$

$\boxed{x = 2}$

خط التقارب الأفقي

$\boxed{y = 0}$

تحديد الأرباع موجبة إذاً فالرسم في الربع الأول والثاني.



ثالثاً الاقتران المتشعب

هو اقتران يحتوى أكثر من قاعدة على فترات محددة أو نقاط محددة .

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 2 , & x > 2 \\ 6x^2 - 2 , & x > 2 \end{cases}$$

نقطة التشعب

نلاحظ :

- عندما x اقل من 2 نستخدم القاعدة $6x^2 + 1$
- عندما $x = 2$ نستخدم القاعدة $6x^2 + 1$
- عندما x أكبر من 2 نستخدم القاعدة $5x - 2$

مثال

إذا كان $f(x) = \begin{cases} x , & x \geq 1 \\ x + 3 , & < 1 \end{cases}$ جد كلاً مما يلي :

1) $f(5)$

نلاحظ ان (5) اكبر من (1) نستخدم القاعدة x

$f(5) = 5$

2) $f(0)$

نلاحظ ان الصفر اقل من 1 نستخدم القاعدة $x + 3$

$f(0) = 0 + 3 = 3$

3) $f(1)$

نلاحظ ان $x = 1$ هي عند المساواة

$f(x) = x$

$f(1) = 1$

مثال

إذا كان $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \geq 0 \\ x - 3 & x < 0 \end{cases}$ جد كلاً مما يلي :

1) $f(5)$

$= 2 \times 2 + 1$

$= 4 + 1 = 5$

2) $f(-1)$

$= -1 - 3$

$= -4$

3) $f(0)$

$= 2 \times 0 + 1$

$0 + 1 = 1$

تمثيل الاقتران المتشعب بيانياً

نمثل كل اقتران فيه حسب قاعدة مجاله

مثال

مثل الاقتران :

$$f(x) = \begin{cases} x \quad , & x \geq 1 \\ x + 3 , & x < 1 \end{cases}$$

نبدأ بالقاعدة $\boxed{x , x \geq 1}$

x	1	2	3
y	2	2	3

النقاط

(1 , 1)

(2 , 2)

(3 , 3)

القاعدة $\boxed{x + 3 , \quad x < 1}$

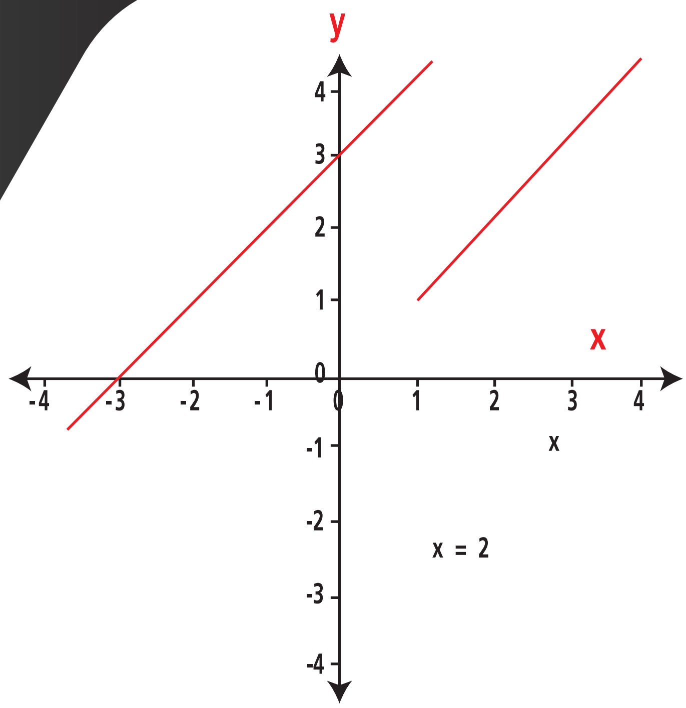
x	-2	-1	0
y	1	2	3

النقاط

(-2 , 1)

(-2 , 1)

(0 , 3)



رابعاً الاقتـــران الأســـي

الصورة العامة

$a , b \in IR \quad , a \neq 0 \quad , b \neq 1 \quad , b > 0$

$f(x) = 2(0.5)^x$

$f(x) = (4)^x$

المجال والمدى للاقتران الأسي

$a < 0$

سالب المجال R

المدى $(-\infty \ , 0)$

$a > 0$

موجب المجال R

المدى $(0 , \infty)$

مثال

إذا كان $f(x) = 2(3)^x$ جد المجال والمدى و $f(0)$ و $f(1)$

المجال R

المدى $(0 , \infty)$

$f(0) = 2(3)^0 = 2 \times 1 = 2$

$f(1) = 2(3)^1 = 2 \times 3 = 6$

خامساً الاقتـــران الجـــذري

هو اقتران يحتوي جذراً لمقدار جبري

$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{2}}$

المجال والمدى للاقتران الجذري

الجذر الفردي

$\sqrt[3]{\ } \ , \ \sqrt[5]{\ } \ , \ \sqrt[7]{\ }$

المجال : R

المدى : R

الجذر الزوجي

$\sqrt[2]{\ } \ , \ \sqrt[4]{\ } \ , \ \sqrt[6]{\ }$

المجال :

مجموعة الأعداد التي تجعل المقدار تحت الجذر عدداً غير سالب

المدى :

مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة .

مثال

جد المجال والمدى للاقترانات التالية :

1) $f(x) = \sqrt{2x - 1}$

$2x - \cancel{6} \geq 0$

$\cancel{+6} \quad +6$

$\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} > \dfrac{6}{2} \longrightarrow x \geq 3$

المجال : $[3 , \infty)$

مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+

المدى : $(0 , \infty)$

$2)\ f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

المجال : R

المدى : R

$3)\ f(x) = \sqrt{3x+12} - 2$

$$3x + \cancel{12} \geq 0$$
$$\cancel{-12} \quad -12$$

$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} \geq \frac{-12}{3}$$

$$\boxed{x \geq -4}$$

المجال : $[-4, \infty)$

المدى : $(-2, \infty)$

تدريب

1) جد مجال و مدى كل من الاقترانات الآتية:-

$1)\ f(x) = 5$

$2)\ f(x) = -x^2$

$3)\ f(x) = x^2 - 1$

$4)\ f(x) = \dfrac{2}{x-1}$

$5)\ f(x) = 2(0.3)^x$

$6)\ f(x) = -(0.5)^x$

$7)\ f(x) = \sqrt{x-1} + 2$

$8)\ f(x) = \sqrt[3]{x-5}$

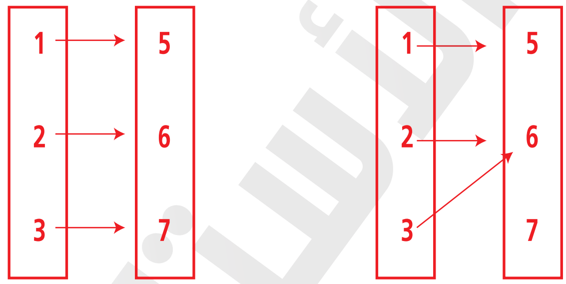
2) إذا كان $f(x) = \begin{cases} x-5, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$ جد مايلي :

$1)\ f(-1) \qquad 2)\ f(0) \qquad 3)\ f(3)$

ثم مثل $f(x)$ بيانياً

اقتران واحد لواحد

هو اقتران يربط لكل عنصر في المجال بصورة واحدة في المدى .



اقتران واحد لواحد   ليس اقتران واحد لواحد

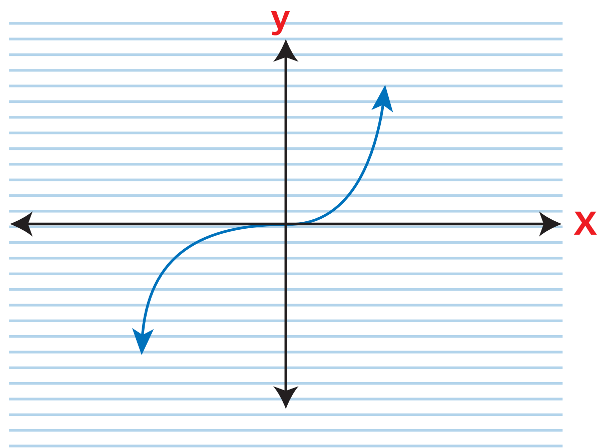
* يمكن استخدام اختبار الخط الأفقي للتحقق من أن الاقتران واحد لواحد أم لا .

ذلك برسم خطوط أفقية فإذا قطع أي منهما منحنى الاقتران بأكثر من نقطة يكون الاقتران ان ليس واحد لواحد .
أما إذا قطع في نقطة واحدة يسمى اقتران واحد لواحد .

مثال

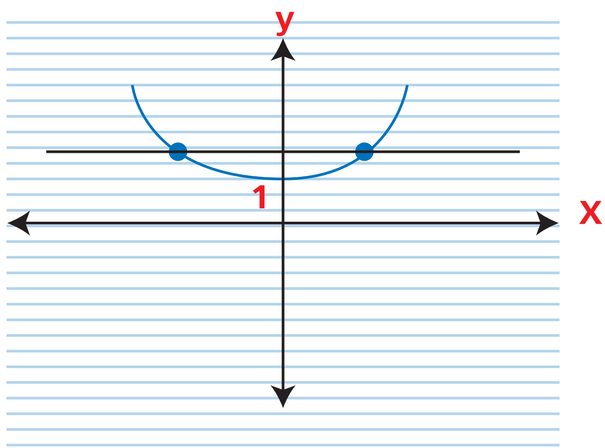
بين إذا كان الحل اقتران مما يأتي واحد لواحد أم لا ؟

1) $f(x) = x^3$



الاقتران ان $f(x)$ اقتران واحد لواحد .

2) $f(x) = x^2 + 1$



الاقتران ان $f(x)$ ليس اقتران واحد لواحد .

* نلخص الاقتران واحد لواحد كما يلي :-

1 - الاقتران الثابت $f(x) = a$ ليس اقتران واحد لواحد

2 - الاقتران الخطي $f(x) = ax + b$ اقتران واحد لواحد

3 - الاقتران التربيعي $f(x) = ax^2 + bx + c$
ليس اقتران واحد لواحد

إلا إذا حدد مجال الاقتران التربيعي

$f(x) = x^2 + 1 \quad , \quad X \geq 0$

هنا واحد لواحد

4 - الاقتران التكعيبي هو اقتران واحد لواحد

5 - الاقتران النسبي هو اقتران واحد لواحد

الاقتران العكسي

$f^{-1}(x)$ هو معكوس الاقتران $f(x)$ ولا يمكن إيجاد الاقتران العكسي إلا في حال كان $f(x)$ اقتران واحد لواحد

*** كيفية ايجاد الاقتران العكسي**

1 - التبديل

مثال

جد $f^{-1}(x)$ للإقتران $f(x) = 4x - 20$

بدل $f(x) \longleftarrow y$

$y = 4x - 20$

اجعل x موضع القانون

$y = 4x - \cancel{20}$

$+20 \quad \cancel{+20}$

$\frac{y+20}{4} = \frac{4x}{4}$

$x = \frac{y+20}{4}$

بدل $x \longleftarrow f^{-1}(x)$

بدل $y \longleftarrow X$

$f^{-1}(x) = \frac{X}{4} + 5$

2 - باستخدام العلاقة

$(fof)(x) = x$

مثال

جد $f^{-1}(x)$ للإقتران $f(x) = 4x - 20$

$(fof^{-1})(x) = x$

$f(f^{-1}(x)) = x$

$4f^{-1}(x) - \cancel{20} = x$

$\cancel{+10} \quad +10$

$\frac{\cancel{4}f^{-1}(x)}{\cancel{4}} = \frac{x+20}{4}$

$4f^{-1}(x) = \frac{X}{4} + 5$

تدريب

جد الاقتران العكسي لكل مما يلي :-

1) $f(x) = 7x + 5$

2) $f(x) = \sqrt{2x - 5}$

3) $f(x) = x^2 + 2 , \quad x \geq 0$

4) $f(x) = \sqrt{3x + 12} - 2$

معادله الخط المستقيم

هي علاقة جبريه تربط بين الاحداثي السيني (X) والصادي (y) للنقطه (x, y) التي تقع على خط مستقيم معين

* معادله الخط المستقيم (تحتاج)

- نقطه غيرتها المستقيم (x_1, y_1)

- ميل الخط المستقيم $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

معادلة الحظ المستقيم

أولاً إيجاد معادلة الخط المستقيم عن طريق المعطيات

مثال

اكتب معادلة الخط المستقيم في كل حالة من الحالة الاتية.

1 - ميله 4 ويمر بالنقطة بالنقطة $(2 ، 3)$

$m = 4$

$(\underset{x_1}{2}, \underset{y_1}{3})$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = 4(x - 2)$

$y - \cancel{3} = 4x - 8$
$\quad \cancel{+3} \qquad\quad +3$

$y = 4x - 5$

2 - غير بالنقطتين $(\underset{x_1}{-1}, \underset{y_1}{5})$ $(\underset{x_2}{4}, \underset{y_2}{3})$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 0}{4 - -1} = \frac{3}{5}$$

$$\boxed{m = \frac{3}{5}}$$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 0 = \dfrac{3}{5}(x + 1)$

$$\boxed{y = \frac{3}{5}x + \frac{3}{5}}$$

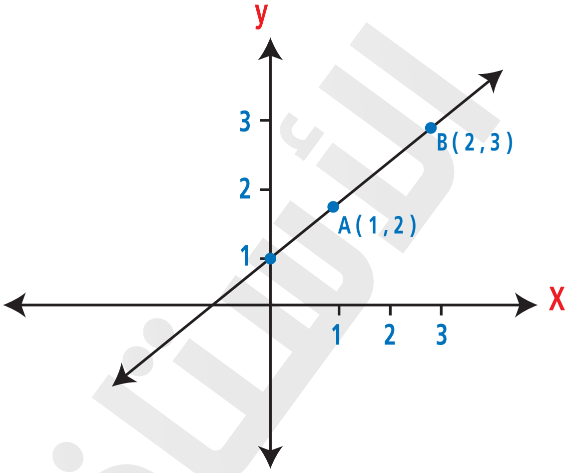
ثانياً إيجاد معادلة الخط المستقيم من خلال الرسم البياني

1 - حدد احداثيات أي نقطتين على المنحنى (الخط المستقيم)

2 - نحو الميل

3 - نعوض بالعلاقة $\quad y - y_1 = m(x_2 - x_1)$

مثـال من الشكل الاتي اكتب معادلة الخط المستقيم



$A\,(\overset{x_1}{1}\,,\,\overset{y_1}{2})\quad B\,(\overset{x_2}{2}\,,\,\overset{y_2}{3})$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-2}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\boxed{m = 1}$$

النقطة $(2\,,\,3)$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = 1(x - 2)$$

$$y - \cancel{3} = x - 2$$
$$\cancel{+3} \qquad +3$$

$$\boxed{y = x + 1}$$